EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

41e JAARGANG 1965/1966

VI — 1 MAART 1966

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening **143917**, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

MODERNIZATION OF SCHOOL MATHEMATICS IN ENGLAND

by

W. O. STORER

Birmingham

1. *Beginnings of the Movement*

There is no exact date on which the movement for modern mathematics in schools was born in this country, but if a year has to be chosen perhaps it should be 1961. In this year, on an international plane, the Organization for Economic Co-operation and Development (O.E.C.D.) published its two conference reports ,,New Thinking in School Mathematics'' and ,,Synopses for Modern Secondary School Mathematics''. This is not to say that before then there was little thought or action on the need for modernization of our syllabuses. Many teachers were experimenting with new topics, but most of these experiments were by individuals and were not co-ordinated beyond the walls of a single school. Certain conferences had set the problem within a wider context, notably one at Oxford in 1957. Here, three-cornered discussions took place between school teachers, university professors and mathematicians in industry and technology, which began to widen teachers' view of the situation and showed in particular the contrast between traditional school syllabuses and the variety of uses of mathematics that were being developed elsewhere. Other such conferences were held later, including one at Southampton in 1961, which resulted in the book ,,On Teaching Mathematics'' and which was the direct stimulus to much of the later co-ordinated work. The movement for modernization was thus beginning to set its course and gain momentum without the influence of the O.E.C.D. reports mentioned above. Their appearence, however, served to focus attention on the contrast between some of the more extreme changes advocated from the background of the Continental tradition and the more evolutionary changes emerging from our own. In England school mathematics has always been taught more for use than for an understanding of logical structure and rigorous argument. Even when newer topics were being advocated, it was as much for reasons of practical use as for

theoretical value. The need for giving increased attention to theoretical aspects was, however, becoming apparent at that time, but some of the extremes advocated in the O.E.C.D. reports would have been impossible to graft on to our tradition. This vivid contrast, however, just at that moment, compelled our attention and ensured that any course adopted would be consciously chosen and not slipped into merely by natural (or national) tendency. Weight was given to the three factors (a) theoretical value, (b) practical applications, (c) pedagogical principles, including the pupils' interest; but it cannot be said that complete agreement was always reached on the correct balance between them.

In England there is no central control of syllabuses by the Ministry of Education (now re-named the Department of Education and Science), nor is there a central examining body. In Scotland, in contrast, as section 4 of this article shows, the much smaller number of schools and pupils makes it possible for syllabuses to be developed with greater uniformity by the Scottish Education Department (based, of course, on teachers' experience and advice). As a result of the greater variety in England it is impossible here to mention fully the various innovations that were being tried. Individual teachers and small groups were experimenting in primary and secondary schools; teacher training colleges and elsewhere. A fuller picture of the situation can be found in the *Mathematical Gazette* for December 1963 (No. 362), which was devoted entirely to articles on this subject.

The year 1961 marks the time when these individual and small-scale experiments began to give way to larger and more fully organized projects. Several different syllabuses have now been developed for secondary schools by different groups of people, text-books are being written, and arrangements have been made for examinations to be set on these syllabuses at the Ordinary Level (at age 16) and at the Advanced Level (at age 18). The largest and furthest advanced of these groups is the School Mathematics Project (S.M.P.), and this will therefore be taken as the basis of much of our discussion.

2. *The School Mathematics Project.*

The Director of the Project is Professor B. Thwaites of Southampton University, and there are eight schools who were the original members and whose mathematics staff are responsible for decisions on policy and syllabuses. They make quite clear that they develop their syllabuses on their own judgment and for their own

needs, and do not claim them to be the best for all schools, or to be definitive. Other schools have since chosen to join the Project, but because of administrative difficulties with large numbers membership will not be increased beyond the present 41, though other schools are free to follow the course from the published text-books if they wish. The administrative expenses are helped by grants from various industrial funds and trusts. The first draft of a complete seven-year course from 11 to 18 has been completed by a group of teachers from the schools at the heart of the Project, and the revised form of the course is now beginning to be published as text-books. Examinations were set at the Ordinary Level in June 1964 and 1965, and will be set at the Advanced Level for the first time in June 1966.

The changes introduced in the content and treatment can only be understood by a full discussion of the syllabuses and a study of the examination papers. Details, however, are likely to be modified in the light of experience, and so there seems to be no value here in giving more than a general description of the principles behind the syllabuses and making a few comments on the more significant changes from our traditional courses.

2a. The Ordinary Level Syllabus.

This is planned not simply as a preparation for later study in mathematics but as a self-contained course for the general pupil which will indicate the essential nature of the subject and its uses in the modern world. There is some reduction in the amount of time given to the mastery of manipulative techniques, and increased emphasis on mathematical ideas, particularly algebraic structure. The basic ideas of the theory of sets are included, and are need as much as possible in other sections of the course. The basic laws of algebra are studied by concrete situations rather than by axiomatic treatment, but understanding of logical relationships is developed through algebra rather than geometry. Coordinates, vectors and 2×2 matrices are introduced early and applied later to easy geometrical transformations. The traditional geometry course based on Euclid's treatment (already considerably weakened in this country but still claiming value as a logical training) is replaced by the study of Euclidean space by means of transformations. Some simple topological ideas are also included.
Inequalities are studied as well as equalities, and are applied to significant but easy problems in linear programming. Elementary statistical ideas and simple probability are also included. In compu-

tation, more attention is given to approximation and estimates than has been customary and the use of the slide rule is taught without necessarily basing it on the theory of logarithms.

The changes so far mentioned have been mainly ones of inclusion, but one important change is an omission. Since the war elementary calculus has been begun increasingly at this stage, but the S.M.P. syllabus deliberately reverses this trend and excludes it on the ground that there is a serious danger that it would be learned merely as a series of tricks and manipulative techniques, without real understanding.

2b. *The Advanced Level Syllabus.*

As with the Ordinary Level Course this also is designed not merely for those students who will continue their mathematical studies beyond, in this case at a university. However, because of the need of preparation for university courses, the opinions of university mathematicians were obtained on their proposals. The resulting diversity of comment showed the impossibility of pleasing everyone. Some professors found the proposed syllabus too much concerned with applications, others found it not sufficiently concerned, some deplored the reduction of the amount of geometry or the changed approach to it, while others deplored the reduced attention to manipulation in algebra and calculus. While trying to make the course a sound basis for university work the designers nevertheless insist that their decisions are to be based primarily on the needs of their pupils at that stage of their development. Because the syllabus now adopted is not regarded as definitive, it will not be given here in detail; instead, as with the Ordinary Level Syllabus above, comments will be made on the general principles behind it and on significant changes from more traditional courses.

Much — indeed, most — of the old material remains in algebra, trigonometry and calculus, but increased emphasis is laid on structure. Linear structure in particular receives attention, 3×3 matrices are studied, and applied to geometrical transformations. Complex numbers are used, and vectors as far as the scalar product.

Calculus is begun at this stage instead of earlier, as was becoming customary. This delay enables the concepts of analysis to be discussed more deeply, so that the work is not limited to rather superficial practice in techniques. On the other hand, numerical methods are used where appropriate.

Applied mathematics has always been regarded as an important part of the Advanced Level Course, but it has usually been limited

to mechanics, and the criticism has often been made that the questions set had become too stereotyped and too often involved intricate algebraic or trigonometric manipulations rather than deeper principles. The subject of applied mathematics is therefore widened here to include statistics and probability, and in compensation, the amount of mechanics has been reduced. Statics is now omitted; kinematics and dynamics remain, with increased emphasis on basic concepts. In statistics and probability both the empirical and theoretical aspects are shown, and the emphasis is on principles rather than mere techniques, though of course some practice in the latter is needed. Computing and flow diagrams are also included.

An extended course beyond this syllabus is also available for those who wish to specialize more while still at school, but it is hoped that the universities will not require this additional work for admission to their courses, as many have in the past. Some universities have already declared their willingness to accept students without this additional work, and this provides a welcome opportunity to reduce the extent of specialisation at school. There are, however, still marked differences among both school and university teachers on this matter, and no unified practice is likely to be established in the near future.

3. *Other projects.*

Among the other projects, syllabuses and textbooks that are being developed the one which is the furthest advanced and the most widely known is the Midland Mathematical Experiment. Details of its syllabus will not be given here, but it can be said that most of the new topics mentioned in the S.M.P. syllabus will appear here also, though sometimes with a different degree of emphasis. For example, in the textbooks at present available, vectors are introduced earlier and taken further than in S.M.P., and calculus will be introduced in the Ordinary Level Course, unlike S.M.P. One point of interest is that M.M.E. has been designed for pupils of a rather wider range of ability than has S.M.P.

Another important development which should be mentioned is the formation of a Group for Mathematics in Education and in Industry. Members visit industrial and technological institutions and also spend extended periods there during vacations or periods of leave, in order to observe which branches and methods in mathematics, old or new, find applications there. This study is likely to play its part in the formation of new syllabuses, for example, in advocating a larger place for numerical methods.

The discussion above has been mainly based on S.M.P., because it has progressed further than the others and has published more text material. An increasing number of schools are likely to adopt (or experiment with) one or more of the new courses, and modifications will be made as experience shows them to be needed. They will not be ready for standardization for some years, however, and indeed it is not intended that they should ever be given a final, unchangeable form.

One of the difficulties in introducing new syllabuses was getting started. This has now been largely solved within the framework of the secondary school (from age 11), but our ideal is also to bring a deeper understanding and a wider syllabus into primary school mathematics. This movement has been growing steadily since the war, and has just received a new impetus with the creation 1964 of the Nuffield Foundation Mathematics Teaching Project to cover the age range from 5 to 13. Guides for teachers are being written, but are not yet available outside the schools involved in the work. A bulletin, however, is available more widely, and is valuable for information, discussion and the mathematical instruction of teachers.

I said earlier that the Department of Education and Science does not exert influence directly on matters of syllabus and examination. There is one recent exception to this which deserves mention. For pupils in non-selective secondary schools (that is, for all except about the ablest 25 %) there has been introduced a newly designed examination for a Certificate of Secondary Education. An important characteristic of this is that the examination shall be set on a regional basis and that the syllabus shall be decided by a regional committee of teachers. More detailed description is not appropriate here, but is obtainable from the Examinations Bulletins of the Secondary School Examination Council. This Council is not subject to the Department of Education and Science, but is advisory to it, and the Department assists in promoting its recommendations.

These new arrangements have been a stimulus to seize the new opportunities offered for change in content and method in the mathematics courses in these schools. The form of the examination may also in time exert an influence beyond these schools in the more traditional grammar schools.

A further necessary element in reform is, of course, the re-training of teachers themselves where necessary. Up till now this has been attempted only on a relatively small scale and by the initiative of individual universities, societies, writers and the promotors of the

more fully organized projects. Many universities organize courses of weekly lectures and discussions, and conferences take place during vacations. The teachers involved in particular projects also meet regularly. Extensions to this work on a more systematic basis are greatly needed, however, and the Joint Mathematical Council of the United Kingdom has recently published a Report on In Service Training for Teachers of Mathematics containing such recommendations.

4. *A note on the situation in Scotland* (for which I am indebted to Mr. A. G. Sillitto of Jordanhill College of Education, Glasgow).

In 1963 the Scottish Education Department set up a committee to consider the question of syllabus revision. It consists of 15 teachers, two college lecturers and five inspectors of schools, together with five university mathematicians for the upper school part of its work and for advice. It has drawn up an Alternative Syllabus leading to the Ordinary Grade of the Scottish Certificate of Education, and is now considering a continuation of this for the highest classes in the schools. In addition it is writing a complete series of textbooks. These will be revised after being used for a year, and re-issued in more permanent form. During 1964-65 the 15 schools most closely involved in the project through their teachers, and 45 other schools, used the experimental text in their first forms; during 1965-1966 they will use the second form experimental text, while the revised version will be used by a considerable majority of all those Scottish first forms that are embarking on Certificate Courses.

The Scottish Certificate of Education at the Ordinary Grade is intended to be within the reach of about 30 % of each age group and not merely of the pupils of highest ability, so the Alternative Syllabus work cannot be pitched at a rarefied level of abstractness. Nevertheless, it has among its aims a concern for accuracy of language, some appreciation of mathematical structure, and an intelligent use of approximation (including simple iterative procedures and the use of the slide rule and desk calculator). The scope of the work has been widened to include elementary ideas of probability, a much earlier introduction of coordinates, a greater emphasis even in the middle school years on periodicity in the work on trigonometry, and an introduction to vectors. The language and notation of sets and relations are used. Geometry at this level is regarded as the geometry of the physical environment; it is developed, not in traditional Euclidean terms, but at first in terms

of operations on rigid bodies; from these are developed the properties of the simpler transformations of the plane.

To some extent room has been made for new work by reducing the weight of formal manipulation, but it is intended that pupils will continue to acquire the skills for further progress.

5. *Conclusion.*

This brief report, inevitably in rather general terms, indicates that there is no simple and clear picture to display, and that much still remains to be done. For example, no assessment of the success of any of the new syllabuses has yet been made, except by the subjective impressions of the teachers themselves. Nevertheless a coordinated structure across the whole range of primary and secondary education is beginning to emerge. It embodies the modern outlook and makes important steps towards new syllabus content, but leaves flexibility for modification in the light of experience and for variation from one school to another.

6. *Selected Bibliography.*

O.E.C.D., New Thinking in School Mathematics.

O.E.C.D., Synopses for Modern Secondary School Mathematics.

Ed. B. Thwaites, On Teaching Mathematics, Pergamon, 1961.

Secondary School Examinations Council, Examination Bulletin No. 1 and 2, H.M.S.O.;
No. 1: The Certificate of Secondary Education, 1963
No. 2: Experimental Examinations in Mathematics, 1964.

Schools Council for the Curriculum and Examination:
Curriculum Bulletin No. 1: Mathematics in Primary Schools, H.M.S.O. 1965.

Mathematical Gazette XLVII, 362, Dec. 1963: A Symposium on „Modern Mathematics".

Ed. T. J. Fletcher, (for the Association of Teachers of Mathematics): Some Lessons in Mathematics; Cambridge, 1964.

School Mathematics Project: Course of Textbooks in process of publication by Cambridge University Press.

Midlands Mathematical Experiment: Course of Textbooks in process of publication, Harrap.

Scottish Mathematics Group: Modern Mathematics for Schools, Course in process of publication, Blackie-Chambers.

REËLE EN P-ADISCHE GETALLEN VAN TOPOLOGISCH STANDPUNT UIT BEZIEN*

door

PROF. DR. A. F. MONNA

Utrecht

1. *Inleiding.*

In een reeks van voordrachten over de getaltheorie is het nuttig zich te bezinnen over de rol en de betekenis van de reële getallen in de wiskunde. Het zal blijken dat overwegingen dienaangaande op natuurlijke wijze leiden tot invoering naast de reële getallen van een ander tot op zekere hoogte gelijkgerechtigd type van getallen, de z.g. P-adische getallen.

We gaan uit van het lichaam Q van de rationale getallen. Op de invoering daarvan wordt niet ingegaan; zij vindt plaats door een algebraïsch procédé (quotiëntvorming). Bij de overgang van de rationale getallen naar de reële getallen wordt echter een niet zuiver-algebraïsch hulpmiddel gebruikt. De invoering geschiedt door een completeringsproces, dat (afgezien van de lichaamseigenschap van de reële getallen) een bijzonder geval is van het algemene completeringsprocédé voor metrische ruimten. In het lichaam **R** van de reële getallen zijn dan ook twee klassen van eigenschappen essentieel verenigd: algebraïsche en topologische eigenschappen. In het kort verloopt het procédé als volgt: in Q wordt een *afstand* ingevoerd als volgt: als $a \in Q$ zij $|a|$ de „gewone" absolute waarde van a. Dan is door

$$d(a, b) = |a - b|, a, b \in Q$$

een afstand gedefiniëerd. Men verifiëert direct de bekende eisen waaraan een afstand moet voldoen, o.a. de driehoeksongelijkheid, $d(a, b) \leqq d(a, c) + d(b, c)$. Merk op dat bovendien $|ab| = |a| \cdot |b|$. Men definiëert vervolgens *fundamentaalrijen* $\{a_i\}$: voor elke $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in Q$ is er een natuurlijk getal $N(\varepsilon)$, zo dat

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ voor } n, m > N(\varepsilon).$$

---

*) Naar aanleiding van voordrachten, gehouden op de vakantiecursus 1965 van het Mathematisch Centrum te Amsterdam en Eindhoven.

Men bewijst dat de fundamentaalrijen een ring O vormen. Een nulrij $\{a_i\}$ is een rij in Q zó dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een N is zó dat

$$|a_n| < \varepsilon \text{ voor } n > N.$$

Men bewijst dan dat de restklassen van O modulo het ideaal van de nulrijen een lichaam vormen, dat de eigenschappen heeft die ons bekend zijn van de reëele getallen (ordening, absolute waarde, stelling van de bovenste grens, lokale compactheid, d.w.z. de stelling van Bolzano-Weierstrasz).

Essentieel bij dit procédé is de invoering van de „gewone" absolute waarde $|a|$.

Men kan nu de volgende vraag stellen:

Kan men op Q functies definiërën, verschillend van de „gewone" absolute waarde $|\cdot|$, die ook de eigenschappen bezitten die nodig zijn om uitgaande van Q het completeringsproces tot een lichaam uit te voeren?

Indien dit zou kunnen, zou men aldus een nieuw soort getallen vinden. Het antwoord op de vraag luidt bevestigend.

2. *De P-adische waarde.*

Zij P een vast priemgetal. Zij $a \in Q$, $a \neq 0$. Op één manier kan a worden geschreven in de vorm $a = \frac{t}{n} P^k$ als $(t, P) = (n, P) = 1$. Definieer dan op Q de functie $|\cdot|_P$ als volgt:

$$\left.\begin{array}{l} |0|_P = 0 \\ |a|_P = P^{-k} \text{ als } a \neq 0 \end{array}\right\}$$

Men verifieert dat deze functie alle verlangde eigenschappen heeft. De driehoeksongelijkheid wordt scherper, nl.

$$|a + b|_P \leqq \max (|a|_P, |b|_P)$$

en zelfs

$$|a + b|_P = \max (|a|_P, |b|_P) \text{ indien } |a|_P \neq |b|_P.$$

In het bijzonder is dus voor alle gehele getallen n

$$|na|_P \leqq |a|_P.$$

Wegens deze laatste ongelijkheid noemt men de functie $|\cdot|_P$ een niet-archimedische waardering van Q (voor het begrip waardering zie no. 3). Verder is $|ab|_P = |a|_P \,.\, |b|_P$.

Maakt men met $|\cdot|_P$ dan weer een afstand d_P door te stellen

$$d_P(a.\, b) = |a-b|_P,$$

dan kan met behulp hiervan het completeringsprocédé op Q worden toegepast. Men verkrijgt dan een lichaam en dit is het z.g. *lichaam K_P van de P-adische getallen*. De P-adische getallen worden dus gedefinieerd als klassen van fundamentaalrijen van rationale getallen. Maar de afstand met behulp waarvan de fundamentaalrijen worden gedefinieerd is verschillend van die waarmede men op analoge wijze tot de reële getallen komt. Een P-adisch getal is echter niet een abstracter begrip dan bijvoorbeeld het getal $\sqrt{2}$. Overigens is Q bevat in K_P (neem de fundamentaalrij $(a, a, \ldots)$, $a \in Q$).

Enkele eigenschappen van de P-adische getallen.

2.1. Is het P-adische getal α gerepresenteerd door de fundamentaalrij $(a_1, a_2, \ldots)$ waarin $a_i \in Q$, dan wordt de P-adische waarde van α gedefinieerd door

$$|\alpha|_P = \lim_{n\to\infty} |a_n|_P.$$

Men verifiëert gemakkelijk dat deze definitie niet afhangt van de keuze van de fundamentaalrij door welke men α representeert. De waarde is dus 0 of van de vorm P^k met k geheel. Men heeft

$$|\alpha + \beta|_P \leqq \max (|\alpha|_P, |\beta|_P).$$

Door deze absolute waarde worden convergentiebeschouwingen mogelijk in K_P; de convergentie moet dan worden gedefinieerd met de P-adische waarde. K_P is een metrische ruimte.

2.2. Is α_n een convergente rij van P-adische getallen en

$$\lim_{\infty\to n} \alpha_n = \alpha \neq 0,$$

dan is $|\alpha_n|_P = |\alpha|_P$ van een zekere waarde van de index n af.
Bewijs: Zij $|\alpha|_P = \lambda \neq 0$. Zij $0 < \varepsilon < \lambda$. Krachtens definitie is er een $N(\varepsilon)$ zó dat

$$|\alpha_n - \alpha|_P < \varepsilon \text{ voor } n > N$$

Dan is voor $n > N$

$$|\alpha_n|_P = |\alpha_n - \alpha + \alpha|_P = \max (|\alpha_n - \alpha|_P, |\alpha|_P) = |\alpha|_P.$$

2.3 Beschouw de verzameling M van de P-adische getallen α met $|\alpha|_P \leqq 1$; men verifieert gemakkelijk dat deze getallen een ring vormen, de z.g. ring van de gehelen.
Definieer $\alpha \sim \beta$ als $|\alpha - \beta|_P < 1$. Men bewijst gemakkelijk (met toepassing van de verscherpte driehoeksongelijkheid) dat dit een

equivalentierelatie is, zodat een indeling van M in disjuncte klassen ontstaat. Zij M_0 de verzameling van de getallen 0, 1, . . ., $P - 1$. Uitgezonderd het getal 0 hebben ze alle de P-adische waarde 1 (vgl. de definitie). Men verifieert dat in elke klasse *precies één* van deze getallen ligt. Met behulp van deze eigenschap leidt men op de volgende wijze een reeksontwikkeling af voor de P-adische getallen.

Zij α een P-adisch getal, $\alpha \neq 0$. Door vermenigvuldiging met een passende macht van P kan men bereiken dat $|\alpha|_P = 1$ is. Er is dus precies één element $a_0 \in M_0$ zó dat

$$|a_0 - \alpha|_P < 1.$$

Stelt men $\alpha = a_0 + \xi$, dan is dus $|\xi|_P < 1$. Wegens de discrete waardeverzameling is dus $|\xi|_P \leqq P^{-1}$ of wel $|\xi P^{-1}|_P \leqq 1$. Hetzelfde procédé kan dan worden toegepast op ξP^{-1} en men vindt dan een eenduidig bepaald element $a_1 \in M_0$, zó dat $|\xi P^{-1} - a_1| < 1$. Dit procédé kan onbepaald worden voortgezet. Men vindt dan voor α een ontwikkeling

$$\alpha = a_0 + a_1 P + a_2 P^2 + \ldots, a_i \in M_0.$$

Deze reeks convergeert P-adisch. De coëfficiënten a_i zijn eenduidig bepaald. Algemeen geldt dat elk P-adisch getal α op één en slechts één wijze kan worden voorgesteld door een convergente reeks van de vorm

$$\alpha = \sum_{i=-n}^{\infty} a_i P^i,\ a_i \in M_0,\ n \text{ een geheel getal,}$$

waarbij

$$|\alpha|_P = P^n.$$

Merk op, dat de eenduidigheid van deze reeksontwikkeling merkwaardig is. In het lichaam van de reële getallen geldt, als men ontwikkelt naar afdalende machten van P, deze eenduidigheid niet, zoals wel bekend is.

Zo is bijvoorbeeld als $P = 3$

$$-1 = 2 + 2.3 + 2.3^2 + \ldots.$$

2.4. K_P is lokaal compact; anders gezegd in de metrische ruimte: in K_P geldt de stelling van Bolzano-Weierstrasz. Begrensdheid van een verzameling V in K_P wil zeggen dat er een getal $A > 0$ bestaat zò dat $|\alpha|_P \leqq A$ is voor alle $\alpha \in V$. Wegens eigenschap 2.3. betekent dit dat er een geheel getal N bestaat zò dat alle $\alpha \in V$ zijn

van de vorm

$$a_{-N}P^{-N} + \ldots + a_0 + a_1 P + a_2 P^2 + \ldots, a_i \in M_0.$$

Het bewijs is nu eenvoudig. Daar M_0 een eindige verzameling is en V een oneindige, bevat V oneindig veel elementen waarvoor de coëfficiënt van P^{-N} dezelfde waarde heeft, stel b_{-N}. Noem deze verzameling V_1. Evenzo bevat V_1 een oneindige deelverzameling V_2 waarvan alle elementen dezelfde coëfficiënt van P^{-N+1} hebben, stel b_{-N+1}. Zet men dit procédé voort, dan vindt men een P-adisch getal

$$b_{-N}P^{-N} + \ldots b_0 + b_1 P + \ldots,$$

waarvan men gemakkelijk inziet dat het een verdichtingspunt is van V.

2.5. In K_P geldt de stelling van de bovenste grens. D.w.z. elke naar boven begrensde verzameling V in K_P heeft een bovenste grens A en V bevat een element α zó dat $|\alpha|_P = A$. Dit volgt onmiddellijk uit het feit dat de waarden van de elementen een discrete verzameling vormen, dus slechts 0 als verdichtingspunt hebben (nl. de getallen P^n, n geheel).
Het lichaam van de P-adische getallen bezit dus vele eigenschappen die ook toekomen aan de reële getallen. Er zijn echter ook eigenschappen die niet gelden.

(i) *De reële getallen* **R** *vormen een samenhangende topologische ruimte.*

D.w.z. men kan **R** niet schrijven als de vereniging van twee niet-lege, open disjuncte verzamelingen.
Daarentegen is K_P *onsamenhangend.* Dit hangt er mee samen dat in K_P elk punt willekeurig kleine omgevingen heeft die zowel open als gesloten zijn. Beschouw nl. de bollen B_ε: $|\alpha|_P \leqq \varepsilon$ met middelpunt O. Deze bollen zijn blijkbaar gesloten. Maar ook open. Zij nl. $\alpha_0 \in B_\varepsilon$. Stel $B_\varepsilon(\alpha_0)$ de verzameling $|\beta - \alpha_0|_P \leqq \varepsilon$. Dan is

$$|\beta|_P = |\beta - \alpha_0 + \alpha_0|_P \leqq \max(|\beta - \alpha_0|_P, |\alpha_0|_P) \leqq \varepsilon,$$

dus $B_\varepsilon(\alpha_0) \subset B_\varepsilon$.
Voor omgevingen van punten $\neq 0$ gaat dit uiteraard op dezelfde wijze (translaties).
Maar ook de bollen $|\alpha|_P < \varepsilon$ zijn zowel open als gesloten. Neem dan de bol B_ε: $|\alpha|_P \leqq \varepsilon$. Neem $\delta < \varepsilon$ en beschouw ook B_δ. Dan vindt men door B_δ en $B_\varepsilon - B_\delta$ een splitsing in disjuncte open verzamelingen van B_ε.

Elke omgeving is dus zelfs onsamenhangend.

In termen van de dimensie uitgedrukt geldt dus: de reële getallen vormen een één-dimensionale ruimte, de P-adische een nul-dimensionale ruimte.

(ii) *Op K_P kan niet een orderelatie worden gedefinieerd zó dat K_P een totaal geordend lichaam wordt.*

Aan een orderelatie, aangeduid door $\geqq$, op een lichaam K worden, behalve de gewone eisen (antisymmetrie, transitiviteit, reflexiviteit) opgelegd de condities

(a): $x \geqq y \Rightarrow x + z \geqq y + z$ voor alle $z \in K$,
(b): $x \geqq 0$ en $y \geqq 0 \Rightarrow xy \geqq 0$.

De P-adische getallen gedragen zich op het punt van ordening dus als de complexe getallen.
Op dit ordeningsprobleem wordt niet en détail ingegaan. (Men zie Bourbaki [1]). Ter toelichting diene het volgende voorbeeld (het algemene geval wordt analoog behandeld).
Merk eerst op, dat er P-adische lichamen bestaan waarin -1 een kwadraat is, d.w.z. dat er een P-adisch getal α is zó dat $\alpha^2 + 1 = 0$. Neem bijv. $P = 5$ (bewijs met behulp van successieve approximatie volgens de methode als aangegeven onder eigenschap 2.3; dit komt neer op het successievelijk oplossen van congruenties) [1]).

Beschouw een dergelijk P-adisch lichaam. Zij $\alpha^2 + 1 = 0$. Onderstel nu dat een (totale) ordening bestond op dit lichaam. Onderstel $\alpha \geqq 0$. Dan volgt door toepassing van de eisen (a) en (b)

$$\alpha \geqq 0 \overset{(b)}{\Rightarrow} \alpha^2 \geqq 0 \Rightarrow -1 \geqq 0.$$
$$-1 \geqq 0 \overset{(b)}{\Rightarrow} 1 \geqq 0,$$
$$-1 \geqq 0 \overset{(a)}{\Rightarrow} 0 \geqq 1,$$

waarmede een contradictie is bereikt. De onderstelling $\alpha \leqq 0$ behandelt men op dezelfde wijze.

3. *De stelling van Ostrowski.*

Uitgaande van Q zijn nu dus door een completeringsprocédé geconstrueerd 1e de reële getallen en 2e de diverse P-adische lichamen. De vraag is of dit proces hiermede is uitgeput.

Om deze vraag te kunnen beantwoorden moeten we opmerken,

---

[1]) Uit dit voorbeeld blijkt bovendien dat bij de completering aan Q nieuwe elementen worden toegevoegd.

dat de achtergrond van de completering is gelegen in het *begrip waardering van een lichaam.*

Zij K een lichaam (bijv. de rationale getallen). *Dan heet K gewaardeerd* indien op K is gedefinieerd een reële functie Φ met de eigenschappen

$$\Phi(a) > 0 \text{ voor } a \neq 0$$
$$\Phi(0) = 0$$
$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$$
$$\Phi(a+b) \leqq \Phi(a) + \Phi(b).$$

De laatste ongelijkheid wordt in bijzondere gevallen (de z.g. niet-archimedische waarderingen) verscherpt tot

$$\Phi(a+b) \leqq \max\,(\Phi(a), \Phi(b)).$$

Men noemt Φ *een waardering.*

Neem nu Q. Blijkbaar zijn de „gewone'' absolute waarde op Q en de in 2 ingevoerde P-adische waarde allen waarderingen in deze zin. Met elke waardering van Q kan in principe de completering worden doorgevooerd.

Nu is door Ostrowski bewezen, dat dit in wezen de enig mogelijke waarderingen van Q zijn. Men heeft nl. de volgende stelling:

Een niet-triviale waardering Φ van Q is of wel van de vorm $\Phi(a) = |a|^\rho$ met $0 < \rho \leqq 1$, of wel van de vorm $\Phi(a) = |a|_P^\sigma$ met een vast priemgetal P en een vaste $\sigma > 0$. Zij is dus equivalent met de „gewone'' absolute waarde of met een P-adische. [2]).

Met de reële getallen en de P-adische getallen is het procédé dus uitgeput. Naast de reële getallen staan dus als gelijkberechtigd de P-adische lichamen. Voor het bewijs van deze stelling van Ostrowski zie men Van der Waerden [6].

Met de P-adische getallen kan men getallentheorie en analyse bedrijven, zij het dat men er onder meer op bedacht moet zijn dat de ordening ontbreekt. Omdat K_P locaal compact is, bestaat bijvoorbeeld in K_P een maat, de z.g. Haar-maat (zie Monna [4]).

4. *Stelling van Pontrjagin.*

Onder 2 is opgemerkt, dat, in tegenstelling tot de reële getallen, de P-adische getallen een niet samenhangend topologische lichaam vormen. Een *topologisch lichaam* is een lichaam waarop een topo-

---

[2]) Een waardering heet triviaal indien $\Phi(0) = 0$ en $\Phi(a) = 1$ voor alle $a \neq 0$. Twee waarderingen φ en ψ heten equivalent indien een nulrij voor φ ook een nulrij voor ψ is en omgekeerd.

logie is gedefinieerd zodanig dat aan zekere eisen is voldaan (continuïteit van vermenigvuldiging en optelling), die verband leggen tussen de algebraïsche structuur en de topologie.

De samenhangendheidseigenschap blijkt nu een essentieel verschil te zijn tussen de reële en de P-adische getallen. Hierover geeft een *stelling van Pontrjagin* uitsluitsel.

Zij K een locaal compact samenhangend topologisch lichaam. Dan is K isomorf met het topologische lichaam van de reële getallen of met het topologische lichaam van de complexe getallen.

Laat men ook niet-commutatieve lichamen toe, dan is er een derde mogelijkheid: K kan isomorf zijn met het lichaam van de quaternionen.

Voor het bewijs van deze stelling zie men Pontrjagin [5]. Opgemerkt zij nog dat de eis van locale compactheid in deze stelling het mogelijk maakt verband te leggen met het begrip waardering. Men kan nl. bewijzen dat elk locaal compact topologisch lichaam kan worden voorzien van een waardering die, tot metriek gemaakt, de topologie voortbrengt (zie in dit verband Van Dantzig [2] en Kaplansky [3]). In het bewijs van Pontrjagin wordt het begrip waardering niet gebruikt; het bewijs berust op de theorie van de topologische groepen en lichamen.

De exclusieve plaats die de reële (en complexe) getallen in de wiskunde innemen wordt door de in het voorgaande geschetste theorieën belicht. Wenst men in een theorie af te zien van het gebruik van zekere eisen van de reële getallen (bijvoorbeeld de ordening), dan is de unieke plaats van de reële getallen niet gerechtvaardigd.

Literatuur.

1) Bourbaki, N., *Algèbre*, Chap. VI, groupes et corps ordonnés (1952).
2) Dantzig, D. van, *Studiën over topologische algebra*, Amsterdam (1931).
Zur topologischen Algebra I, Math. Annalen 107, 587–626 (1933).
Zur topologischen Algebra II, Compositio Math. 2, 201–223 (1935).
3) Kaplansky, I., *Topological methods in valuation theory*, Duke Math. Journal 14, 527–541 (1947).
4) Monna, A. F. *Sur une transformation simple des nombres P-adiques en nombres réels*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. 55, 1–9 (1952).
5) Pontrjagin, L. *Topological groups* (1946) blz. 173.
6) Waerden, B. L. van der, *Algebra I* (6e oplage 1964).

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

LXI. *Wiskundigen over zichzelf.*

De gebeurtenissen in het leven van een wiskundige zijn, enkele uitzonderingen daargelaten, veelal te weinig spectaculair om aanleiding te zijn tot een beschrijving, terwijl voor de ontwikkelingsgeschiedenis van hun gedachten en methoden door de aard van het vakgebied slechts in een beperkte kring van ingewijden belangstelling kan bestaan. Vandaar dat er van mathematici, in tegenstelling met b.v. schilders, schrijvers en staatslieden, betrekkelijk weinig biografieën verschijnen. Autobiografische geschriften zijn uiteraard nog schaarser. Wij noemen een viertal uit de laatste kwarteeuw, waarvan overigens slechts twee een uitvoerige levensbeschrijving bevatten, terwijl de andere zich tot meer beknopte autobiografische mededelingen beperken. De keuze berust niet op stelselmatig speuren, maar werd door onze min of meer toevallige ontmoetingen met de bedoelde geschriften bepaald.

In 1940 verscheen van G. H. Hardy (1877—1947), analyticus, in het bijzonder getallentheoreticus, hoogleraar te Cambridge, *A mathematician's apology.* De verdediging van de wiskunde als belangrijk element van cultuur (maar dan zeker niet om haar maatschappelijke toepasbaarheid) wordt hier op voorname wijze gevoerd. Een enkele maal is het betoog polemisch, maar steeds voelt men de beheerste emotie, waarmee de schrijver zich uit over het gebied van geestelijke werkzaamheid, dat zijn leven heeft beheerst en gevuld. In de laatste paragraaf (p. 84—91) komt even een meer persoonlijke klank in de tekst: ,,Thus this concluding section will be in its substance a fragment of autobiography", maar wie hier een openhartige analyse verwacht van de wetenschappelijke ontwikkelingsgang van Hardy, heeft geen rekening gehouden met de terughoudendheid en het *understatement* van deze man, door C. P. Snow [2]) beschreven als ,,one of the most distinguished pure mathematicians of his time, and a picturesque figure in Cambridge". Dezelfde beoordelaar geeft de *Apology* als een van zijn

voorbeelden van literatuur, „written, incidentally, in some of the most beautiful prose of our time, to demonstrate the intellectual, aesthetic and moral values inherent in the pursuit of science."

Het tweede boekje, dat wij hier noemen, is van dezelfde omvang van honderd pagina's en ook slechts ten dele autobiografisch, maar staat overigens van het vorige even ver als een Cambridge *don* van een *Universitätsprofessor*. In zijn *Reden und Reisen eines Geometers* [3]) heeft Wilhelm Blaschke (1885—1962) een aantal opstellen verzameld van algemeen karakter. De meeste redevoeringen werden gehouden bij plechtigheden en herdenkingsbijeenkomsten en hebben veelal als onderwerp een figuur uit de geschiedenis van de exacte vakken. Twee artikelen hebben rechtstreeks op de persoon van de auteur betrekking. De *Lebenslauf* (p. 112—116) is beknopt en blijft nogal aan de buitenkant, al zijn er enkele min of meer onthullende passages. Zeer leesbaar is de uitvoerige beschrijving (*Um die Welt*, p. 75—100) van een wereldreis die naar het tegenwoordige India, naar Japan, China en de Verenigde Staten voerde en boeiende indrukken geeft van het wetenschappelijke en maatschappelijke leven in de bezochte gebieden. Over de Aziatische landen is zijn oordeel opvallend positief, genuanceerder met neiging tot kritiek dat over de V.S. Wij vernemen dat de eerste eigenlijke universiteit in dat land, John Hopkins in Baltimore, in 1876 werd „gegründet unter deutschem Einflusz" en dat de moderne wiskundige ontwikkeling te Chicago begon „unter wesentlicher Mitwirkung zweier Deutscher". De reiziger is onder de indruk van de grote mogelijkheden, die de nieuwe wereld te bieden heeft, maar in „U.S.A. mag sich vielleicht manches ändern, wenn der Zustrom von Gelehrten aus der alten Welt versiegt". In dit verband is karakteristiek het jaar waaruit de reisbeschrijving stamt — 1933.

Uniek is, menen wij, het omvangrijke tweedelige boek dat Norbert Wiener (1894 — 1964) aan eigen leven en werken heeft gewijd [4]). Een geniaal mens, een veelzijdig, oorspronkelijk en diepzinnig denker, ziet op zijn zestigste jaar langs zijn ontwikkelingsgang terug en geeft daarvan, blijkbaar gesteund door een merkwaardig geheugen voor feiten en namen, een uitvoerig en tot in schijnbaar onbetekenende details afdalend verslag met een behoefte aan zelf-ontleding die herhaaldelijk herinnert aan de Rousseau van de *Confessions*. Een wonderkind, dat op zijn twaalfde jaar klaar was met wat wij middelbaar onderwijs noemen, twee jaar later de bachelorsgraad verwierf en op zijn achttiende aan Harvard promoveerde tot doctor in de filosofie. Geen eenzijdige begaafdheid als bij schaakgenieën of muzikale wonderkinderen, maar een alzijdig weten-

schappelijk interesse: voor wiskunde, de exacte vakken, de biologie, de taalwetenschap, de wijsbegeerte. Een jongen, die uiteraard op geen enkele school paste, geen geestelijk contact had met leeftijdgenoten, in wiens ontwikkeling jarenlang een faseverschil was tussen de intellectuele rijpheid en de somatische en emotionele zijde des levens. Een reeks van externe omstandigheden die de conflicten en spanningen versterkten: een uiterst begaafde vader, die hij vereerde en vreesde en tegen wiens overheersing hij heel lang machteloos stond (hij trekt zelf een parallel met Stuart Mill); de ontdekking dat Joden anders zijn dan anderen en zijn gevoeligheid voor werkelijk of vermeend anti-semitisme; een door aangeboren bijziendheid verergerde lichamelijke onbeholpenheid, een *clumsiness* die hem, de eerzuchtige, achterstand geeft bij sport, militaire oefening en laboratoriumwerk. Een, mag men aannemen, eigenwijze, rusteloze, exuberante en ook wel praatzieke man, die weerstand wekt ook als hij behoefte heeft aan gewoon menselijk contact. Is het een wonder dat in de biografie — die goed voer is voor psychologen — gevoelens van onzekerheid en wankelmoedigheid afwisselen met de compensatie der zelfverheffing? Men onderdrukt een glimlach als hij bericht over een psychiatrische behandeling die hij moest ondergaan: deze hyperintelligente man meende zijn Freud allicht beter te kennen dan de dokter. De natuur schijnt hem rust te geven; zeer uitvoerig beschrijft hij de vele wandeltochten in het prachtige landschap van Nieuw Engeland. Zijn huwelijk heeft een goede invloed en het eerste deel van de biografie kan hij opdragen aan zijn vrouw „under whose gentle tutelage I first knew freedom". En ook voor zijn wetenschappelijk werk vindt hij spoedig een goede omgeving; van 1919 af is hij hoogleraar aan M.I.T., welke technische hogeschool de uitzonderlijke man vrij liet en zeer waardeerde.

Het boek van Wiener is niet alleen een psychologisch document betreffende een geniaal en merkwaardig mens; het is ook het levensverslag van een auteur met literaire en journalistieke gaven, die boeiend vertelt van het universitaire leven in zijn geboorteland en in Europa, van zijn gasthoogleraarschappen in China en Mexico, van zijn ontmoetingen met vakgenoten op reizen en congressen. Hij verstaat het om met enkele woorden zijn indrukken te schetsen. Eén voorbeeld uit talloze: Hadamard beschrijft hij als: „a great historical landmark", „small, bearded, very Jewish-looking in the *fin* French way". Ook de beide bovengenoemde wiskundigen komen in zijn boek voor: Hardy („an ideal mentor and model for an ambitious young mathematician", „a rather dried-up, wizened figure in the inevitable unpressed jacket", „desperately afraid of wo-

men"), en ook Blaschke.

Natuurlijk is in Wiener's boek herhaaldelijk van de mathesis sprake, maar de autobiografie is ook voor een niet-wiskundige goed leesbaar. Als men de moeite ziet die hij doet om b.v. het wezenlijke van *Lebesgue*-integratie uit te leggen krijgt men de indruk dat hij een goed, misschien een wat vermoeiend, docent moet zijn geweest. Zijn wiskundig werk heeft altijd aanraking met de toepasbaarheid en komt dikwijls uit een praktisch probleem voort. Zijn grote kennis van de fysica, de elektrotechniek en de biologie en zijn intuïtie om te voren niet of nauwelijks vermoede samenhangen te zien, hebben hem gemaakt tot een groot, modern wiskundige, die in hoge mate *engagé* is. Voorname punten in zijn werk zijn de theorie der Brownse beweging, de Fourier-transformatie, de integraalvergelijkingen, zijn bijdragen tot de ontwikkeling der computers en vooral natuurlijk zijn geniale concepties in de theorie der informatie en de door hem geschapen cybernetica.

Terwijl in de beide delen van Wiener geen formule voorkomt, zal de niet-wiskundige die de laatste hier te bespreken autobiografie ter hand neemt, op zijn minst de neiging hebben vele pagina's over te slaan. Gerhard Kowalewski (1876 — 1950) gaat in zijn levensbericht *Bestand und Wandel* [5]) herhaaldelijk in op specifiek mathematische zaken. Twintig pagina's worden gewijd aan een uiteenzetting der groepentheorie van Lie en verder kan de lezer nog veel leren over integraalvarianten, Pfaffse systemen, de verzamelingsleer van Cantor, de parametrisering van een orthogonale matrix, de vergelijking van Kepler en vele andere onderwerpen. Zij passen uiteraard in de wijze waarop de auteur verslag doet van zijn wetenschappelijke ontwikkelingsgang. Voor ons lijkt mij de positieve waarde dezer herinneringen vooral hierin gelegen, dat een mathematicus van grote verdienste een uitvoerige beschrijving geeft van een carrière aan Duitse en Oostenrijkse universiteiten gedurende een tijdvak dat ver voor de eerste wereldoorlog begint en na de tweede eindigt, een periode waarin politiek en maatschappelijk wel zo het een en ander is gebeurd. Een menselijk document, dit uitvoerig en soms langdradig verslag van hoe het toeging in Greifswald, in Leipzig, Bonn en Praag, elk met hun eigen sfeer, hoe er gewerkt werd en ook wel geïntrigeerd, hoe benoemingen werden bevorderd en tegengewerkt, hoe dit leven vreugden bood en tegenslag en verdrietelijkheid. De schrijver geeft zich zoals hij is; herhaaldelijk *begeistert*, soms verontwaardigd, ook nogal eens sentimenteel, over het algemeen zijn herinneringen gevend in het milde licht van ouderdom en berusting. Bijna beminnelijk in deze zoon

van een onderwijzer uit een dorp in Pommeren is zijn blijvende eerbiedige bewondering voor de groten der aarde. ,,Wenn die Gäste sich verliefen, hielt Geheimrat Arnold noch einige bevorzugte zurück, um mit ihnen über die gewonnenen Eindrücke zu sprechen. Ich erfreute mich seines besonderen Wohlwollens und gehörte immer zu diesem kleineren Kreise. Er liesz uns dann mit seinem Auto nach Hause bringen". Kowalewski heeft in zijn lange leven veel mensen ontmoet en goed geobserveerd. Wij hebben in zijn memoires herhaaldelijk genoten van het bijwerk, van anecdòtische bijzonderheden over grote figuren in de geschiedenis der wetenschap, over Sophus Lie (,,Ich betrachte es als eine besondere Genade Gottes, dasz ich diesen hervorragenden Mann, den gröszten Mathematiker aller Zeiten, in Leipzig gehört und ihn auch persönlich sehr nahe gestanden habe"), in zijn optreden stijlloos en uitermate onverzorgd; over Georg Cantor, die zich op vrijwel pathologische wijze inliet met het Shakespeare-Bacon vraagstuk; over Hilbert, die in zijn Koningsberger periode nog zo'n moeite had met de axiomatiek der meetkunde; over Study, lastig, onafhankelijk, miskend, en over vele anderen.

Vier wiskundigen over zichzelf. Maar begaafdheid voor en neiging tot de mathesis schijnt wel het enige waarin zij overeenstemmen.

Referenties

[1]) G. H. Hardy, *A mathematician's apology.* Cambridge University Press, First edition, 1940. Reprinted, 1948.

[2]) C. P. Snow, *The two cultures: and a second look.* Cambridge University Press, 1964, p. 63; p. 101.

[3]) Wilhelm Blaschke, *Reden und Reisen eines Geometers,* Berlin, 1957.

[4]) Norbert Wiener, *Ex-prodigy.* My childhood and youth. First edition 1953. First M.I.T. Press Paperback edition, 1964. *I am a mathematician.* The later life of a prodigy, 1956. First M.I.T. Press Paperback Edition, 1964.

[5]) G. Kowalewski, *Bestand und Wandel.* Meine Lebenserinnerungen, zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik. München, 1950.

KORREL CXXXI
(Over de cirkelbundel)

In vele analytische meetkunde leerboeken vindt men bij de behandeling van de cirkelbundel de volgende uitspraak:

Zijn $C_1 = 0$ *en* $C_2 = 0$ *cirkels, dan stelt* $C_1 + \lambda C_2 = 0$ *voor elke* $\lambda(\lambda \neq -1)$ *een cirkel voor, want de coëfficienten van* x^2 *en* y^2 *in* $C_1 + \lambda C_2 = 0$ *zijn gelijk en de term met xy ontbreekt.*

Zelfs kan men dit lezen in die leerboeken, die, geheel terecht overigens, enkele bladzijden tevoren uitdrukkelijk vermeld hebben, dat $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ niet voor elke a, b en c een cirkel voorstelt, daar nog aan de voorwaarde $r^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 - c \geqq 0$ moet zijn voldaan. Let men op deze voorwaarde, dan zal het duidelijk zijn, dat de bovenvermelde uitspraak *onjuist* is of althans onvolledig.

Om één en ander nader te onderzoeken, gaan we uit van een cirkel γ en een lijn l. De loodlijn van l door het middelpunt van γ kiezen we als x-as, de lijn l als y-as, zodat $\gamma \equiv (x - a)^2 + y^2 = r^2$ is, waarbij we $a \geqq 0$ kunnen nemen en $l \equiv x = 0$. De vergelijking van de cirkelbundel met γ en l tot basis-exemplaren luidt dan

(1) $$(x - a)^2 + y^2 - r^2 + \lambda x = 0$$

of

$$\left(x - \frac{2a - \lambda}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2 - 4a\lambda + 4r^2}{4}$$

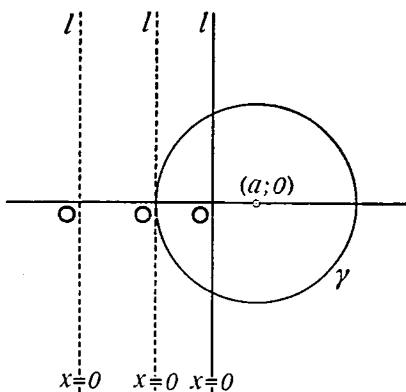
De kwadratische functie $f(\lambda) = \lambda^2 - 4a\lambda + 4r^2$ heeft de discriminant $D = 16(a^2 - r^2)$, zodat voor

1. $D < 0$, d.i. voor $0 \leqq a < r$, dus als l de cirkel γ snijdt, $f(\lambda)$ positief tekenvast is; voor *elke* λ stelt (1) dan een cirkel voor.

2. $D = 0$, d.i. voor $a = r$, dus als l raakt aan γ, $f(\lambda)$ bijna positief tekenvast is; voor *elke* λ is (1) een cirkel (of puntcirkel).

3. $D > 0$, d.i. voor $a > r$, l ligt dan buiten γ, (1) een cirkel voorstelt voor $\lambda \geqq \lambda_2$ of $\lambda \leqq \lambda_1$ waarbij $\lambda_1 < \lambda_2$ de nulpunten zijn van $f(\lambda)$. Tevens ziet men, dat in dit geval er twee puntcirkels (voor $\lambda = \lambda_1$ en $\lambda = \lambda_2$) in de bundel optreden

Heeft men echter bij de behandeling van de cirkel de imaginaire cirkel toegelaten, dan is de in aanhef vermelde uitspraak natuurlijk wel juist, maar is zonder meer m.i. weinig bevredigend. Men kan



zich zelfs afvragen, of het toelaten van imaginaire cirkels bij het v.h.m.o. wel op zijn plaats is. Zolang de imaginaire getallen niet (officiëel) behandeld worden en we daarom een vierkantsvergelijking met $D < 0$ in de algebra als vals aanmerken, zolang is het consequent, een imaginaire cirkel bij het v.h.m.o. als onbestaanbaar te brandmerken.

Ede — R. Kooistra

BOEKBESPREKING

Dr. W. J. Bos, *Grondslag voor Meetkunde I*, J. M. Meulenhoff, Amsterdam, 1965.

Op verzoek van de uitgever heeft Dr. Bos de verzorging op zich genomen van een verkorte uitgave van de bekende „wegwijzerserie" van Bos en Lepoeter. Een uitvoerige bespreking blijkt dan ook niet nodig. Mijn bewondering en mijn bedenkingen zijn vrijwel dezelfde als bij de wegwijzerserie. Slechts het bezwaar tegen de uitgebreidheid van het boek is weggevallen.

Bewondering heb ik voor Hoofdstuk I, waarin de leerling in hoog tempo kennis maakt met veel namen, figuren en begrippen uit de planimetrie. Bewondering heb ik ook voor het Hoofdstuk „Verzamelingen" en voor het hoofdstuk met de bewijsschema's. Die bewijzen komen echter op een moment, waarop de leerling al heel veel weet met de „je ziet wel" methode. Je ziet wel, dat overstaande hoeken, F-hoeken (overeenkomstige hoeken), overstaande hoeken in een pgm. gelijk zijn. Men kan zeggen in het algemeen. „In een pgm delen de diagonalen elkaar middendoor". enz. Gezien de mentaliteit van onze eerste klassers, twijfel ik er geen moment aan, of zij zullen de bereidheid om een hele hoop „te zien" met graagte opbrengen. Dat is m.i. geen reden om een onverantwoorde definitie van rechthoek en ruit te geven, waarin te veel staat.

Bezwaren zie ik ook in de figuursommen; in de figuur, die gegeven is, zijn diverse eigenschappen aangegeven (bv. evenwijdigheid – met een merkwaardig symbool –, loodrechtheid, grootte van hoeken, gelijkheid van lijnstukken e.d.). Ergens staat dan een „?" De leerling mag dan een getal uitrekenen bij lijn of hoek, waarbij dat vraagteken staat. Is dat niet onderschatting van de leerling? Mogen we van hem niet

verwachtten, dat hij een eenvoudig vraagstuk in tekstvorm zelf in een figuur interpreteert? Het boek staat vol ongenummerde goede figuren, waaraan tekst en vooral sommen zijn opgehangen. Of de laat ingevoerde congruentie een belangrijke functie heeft, betwijfel ik; op zijn minst zet ik nu een „?"

Al met al een boek, dat mij – te? – eenvoudig lijkt; in het zelfstandig doorzoeken van welk boek dan ook geloof ik niet voor onze eerste klassers. Wel geef ik Dr. Bos toe, dat in dit geval een snuggere knaap een heil eind komt. Voor het gros zie ik op de achtergrond graag een stevige schoolmeester. Als zodanig zal de gebruiker zeker moeten fungeren.

Het boek, waarvan de prijs mij niet bekend is, is fraai uitgegeven en is bijzonder duidelijk en verzorgd neergeschreven. De vraagstukken zijn eenvoudig. Ik vraag me echter af of de leerling nu ook een vraagstuk op kan lossen, waarbij de figuur de oplossing nu eens nièt suggereert.

Inmiddels dient u van het werkje zeker kennis te nemen. Het verdient uw aandacht zeker.

Groenman

D. Kleppner, *Quick Calculus*, A short manual of self instruction, John Wiley & Sons Ltd., London, 1965, 294 blz., 17/—.

Zoals uit de titel blijkt is dit boekje een poging door programmering de lezer techniek bij te brengen, om vlot te differentiëren en integreren.

Daartoe zijn een 400-tal opgaven samengebracht met keuze-antwoorden en controles.

Burgers

N. O. Niles, D. Sullivan, *Algebra and Trigonometry*, John Wiley & Sons, Londen, 1965, 400 blz., 60/—.

Behandeld worden de elementaire algebra en trigonometrie. Hoofdstuk I begint met de eenvoudigste operaties met verzamelingen, voert moderne notaties in venndiagrammen en roostervoorstellingen.

Als voornaamste verzameling wordt die van de reële getallen onder de loep genomen.

Na deze meer heuristische methode worden dan 16 axioma's over het lichaam van de reële getallen opgesteld en volgt nog eens een strenge behandeling.

Een opzet, dat zal duidelijk zijn, die voor „beginners" moeilijk verteerbaar is. Maar het boek is dan ook meer bedoeld voor leerlingen, die „achteraf" de structuur van hun algebra nog eens critisch willen bezien.

Extra zijn dan de hoofdstukken over matrixrekening, determinanten en enkele niet-lineaire systemen, onderwerpen die zich voor een behandeling in de hoogste klasse wel lenen.

Kennismaking met dit boek zal zeker vruchten dragen voor de didactiek van ons onderwijs.

Burgers

Ir. W. Geerts: *Werken met een rekenliniaal* (Een geprogrammeerde tekst), Nijgh en Van Ditmar, 1965, 32 blz., prijs niet vermeld.

F. Bouman, Ir. W. Geerts, dr. D. J. Lock: *Algebra* (een geprogrammeerde cursus voor het VHMO), deel I, Stichting Onderwijsoriëntatie, 1965, 192 blz., prijs niet vermeld.

In de afgelopen jaren heb ik verscheidene geprogrammeerde teksten met gemengde gevoelens bestudeerd. Dat mengsel bevatte dan als componenten bewondering, wrevel, wantrouwen. Op elk van die componenten wil ik naar aanleiding van de twee bovengenoemde boeken hier ingaan, daarbij vooropstellende dat het uiten van persoonlijke meningen het recht en de plicht van elke recensent is.

Bewondering heb ik meestal gevoeld voor de vaardigheid van de auteurs om een soort atoomsplitsing te verrichten op de moeilijkheden, die hun lezers wellicht kunnen ervaren. Ook hier was dit het geval. Het is natuurlijk essentieel bij deze onderwijsmethode dat elk probleem uiteengerafeld wordt in de allerkleinst denkbare deelprobleempjes. Maar . . . is dat eigenlijk niet zo bij elke onderwijsmethode? Misschien wel, maar hier is deze kwestie noodzakelijk en onontkoombaar; bij andere methoden kan je nog wel eens met enige vlotheid (of zo u wilt slordigheid) over die detailprutserij heen huppelen. Waarschijnlijk zou het voor elke docent heel gezond zijn om eens te proberen de les voor morgen te programmeren. Verrassende ontdekkingen kunnen dan haast niet uitblijven.

Die wrevel is eigenlijk maar een flauw grapje. Ik bedoel daar niet mee dat teksten van deze soort je het gevoel geven als docent wel misbaar te zijn (geeft u gerust een goede leerling dat rekenliniaal-boekje eens in handen als hij te vlug door de stof heen dreigt te lopen; de minder goede leerlingen zullen dan van uw extra aandacht voor hen alleen maar kunnen profiteren). Nee, die wrevel komt alleen maar voort uit het eindeloze geblader en gedraai dat je uit moet voeren als je een overzicht wilt krijgen over wat de auteurs behandelen. Dit geldt natuurlijk ook voor de leerlingen. Daarom heb ik waardering voor de gemakkelijk toegankelijke overzichten in het Algebra-boek.

Maar tenslotte dan dat wantrouwen. Dat komt voort uit het feit dat alle geprogrammeerde teksten, die ik zag, zeer eenvoudige onderwerpen behandelen. Nog nooit heb ik een stereometrie-cursus in geprogrammeerde vorm gezien of een serie lessen over integraalrekening of differentiaalrekening. En als iemand me verzekert, dat dat allemaal wel komen zal, dan ben ik zeer wantrouwend. Ik geloof er niet in. Let wel, ik ben er van overtuigd dat een leerling zo kan leren werken met de rekenliniaal en ook dat de algebraleerstof van de eerste klas geprogrammeerd verwerkt kan worden; de bewijzen liggen voor mij op tafel. Maar ik vraag mij in alle ernst af of een leerling, die enkele jaren geprogrammeerd algebra geleerd heeft later niet ernstige moeilijkheden zal ondervinden bij de complexe begrippen uit de hoogste klassen. Heeft hij dan wel geleerd om voor zich zelf te denken of heeft hij zich dat als een braaf slaafje juist afgeleerd? Nee, zolang ik de geprogrammeerde algebracursus niet compleet gezien heb houd ik mijn (ik herhaal: zeer persoonlijke) wantrouwen en ik nodig u van harte uit om voor u zelf uit te maken wat u er van vindt. De ernstige en enthousiaste poging van de heren Bouman, Geerts en Lock is uw aandacht ten volle waard.

v. Tooren

P. J. Visser, *Algebra voor de brugklas,* N.V. Uitgeversmij. W. E. J. Tjeenk Willink, Zwolle, 1965, 96 blz.

Dit boekje is bedoeld om een bijdrage te leveren voor de selectie van de leerlingen van de brugklas. Nu is deze selectie een uiterst delicate en verantwoordelijke taak, waarbij tevens nog de vraag, welke docenten hiervoor het meeste geschikt zijn, moet zijn opgelost.

Blijkbaar is de auteur van mening, dat een opbouw vanuit de verzamelingleer zich hiervoor uitzonderlijk goed zal lenen.

En al kan ik waardering opbrengen voor de eerste 50 bladzijden, waarbij waarschijnlijk het boek van Leenders: *Verzamelingen en relaties,* een niet onbelangrijke rol zal hebben gespeeld, toch maak ik me ernstig zorgen over de 12 jarigen, die deze stof zullen moeten ondergaan.

Nu kan men vrede hebben met een poging om enkele nieuwe notaties in te voeren en dan zijn het,wil men progressief zijn, natuurlijk die van de leer van de verzamelingen, het wordt me toch te gortig als 12-jarigen op blz. 17 ontdekken, dat een relatie van A naar B een nieuwe verzameling is, bestaande uit geordende paren elementen uit A en B, zodat dit een deelverzameling is van het cartesiaanse produkt van de verzamelingen A en B. Daar helpen geen (Jan, Piet, Klaas) en (Hockeystick, radio, fiets, brommer) met de vraag: „wat wil je graag hebben" aan. En dat een relatie van A naar A ook al reflexief, symmetrisch en transitief kan zijn en dat we ze op blz. 30 al een idee gegeven hebben van wat een functie is, ik kan het niet geloven.

Daarom meen ik, dat deze inleiding wel zijn nut kan hebben in handen van leerlingen, die de techniek met de gewone bewerkingstekens goed onder de knie hebben en die precies weten wat de wiskundige betekenis is van de voegwoorden: *en* en *of,* zodat dit boekje dan toch niet geheel voor niets geschreven is.

Maar met de leerlingen van een brugklas die hierop getracteerd worden kan ik slechts medelijden hebben.

Burgers

BERICHTEN

ZESTIENDE CONGRES

van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen

Op *maandag* 18 *april* 1966 zal in het Transitorium der Rijksuniversiteit te Utrecht [1]) het zestiende Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen worden gehouden. Het congres wordt georganiseerd door Wimecos, Velines, Liwenagel en Velebi.

Als thema is gekozen:

De wetenschappelijke basis van de leraarsopleiding mede in verband met de ontwikkeling van de exacte wetenschappen in de twintigste eeuw.

In de sectievergaderingen zullen problemen, die samenhangen met het algemene thema, maar die toegespitst zijn op de betreffende vakken, worden besproken. In

[1]) In het nieuwe Universiteitscentrum „De Uithof", in de polder ten zuiden van de rijksweg Utrecht—Zeist.

verband met de Jaarvergadering van Velines zal in de sectie natuur- en schiekunde slechts één voordracht gehouden worden. Na iedere voordracht zal er gelegenheid voor een korte discussie zijn.

De belangrijkheid en de actualiteit van het te behandelen thema doen het Congresbestuur vertrouwen, dat vele leden van de organiserende verenigingen zullen deelnemen aan dit congres.

PROGRAMMA

10.00—10.30	Aankomst der deelnemers, waarbij een kopje koffie zal worden aangeboden.
10.30	Opening van het Congres door de voorzitter, Dr. J. Schweers. Plaats: Blauwe zaal
10.45	*Eerste algemene bijeenkomst:* Prof. Dr. H. Freudenthal, Utrecht: De betekenis van de vakwetenschappelijke basis voor de leraar. Plaats: Blauwe Zaal.
11.45—12.45	*Bijeenkomst der secties.* Sectie Wiskunde: Prof. Dr. A. F. Monna, Utrecht.: Oneindig kleine en oneindig grote getallen. Plaats: Witte zaal Sectie Natuur- en Scheikunde: Prof. dipl. ing. J. B. Westerdijk, Delft: Leraarsopleiding en wetenschappelijk onderwijs. Plaats: Blauwe zaal. Sectie Biologie: Prof. Dr. L. M. van Nieuwenhoven (S.J.), Nijmegen: De wetenschappelijke opleiding van leraren in de biologie. Plaats: Rode zaal.
12.45—14.15	*Lunch* in de Cantine van het Transitorium
14.15—15.45	*Bijeenkomst der secties.* Sectie Wiskunde: Prof. Dr. H. C. Hamaker, Eindhoven: Grepen uit de toegepaste statistiek. Plaats: Witte zaal. Sectie Natuur- en Scheikunde: Jaarvergadering Velines. Plaats: Blauwe zaal. Sectie Biologie: Dr. J. C. van der Steen, Utrecht: De leraarsopleiding in het Buitenland. Plaats: Rode zaal.
15.45—16.00	Theepauze.
16.00—17.00	*Tweede algemene bijeenkomst.* Prof. Dr. J. B. Ubbink, Leiden: De betekenis van de vakwetenschappelijke vorming van de leraar. Plaats: Blauwe zaal.
17.00	Sluiting van het Congres door de Voorzitter.

Ten behoeve van treinreizigers zal om 10.00 *uur* een autobus vertrekken van het Centraal Station te Utrecht naar het Transitorium. Deelnemers aan het Congres, die van deze busverbinding gebruik wensen te maken, worden verzocht bij hun aanmelding f 0,50 extra over te maken.

De kosten van deelneming aan het Congres bedragen voor leden van de organiserende verenigingen f 11,—; voor anderen f 15,—. Bij deze bedragen zijn de kosten

voor de lunch, de ochtendkoffie en de middagthee inbegrepen, terwijl het uitvoerige congresverslag aan iedere deelnemer gratis zal worden toegezonden.

Voor deelnemers, verbonden aan een school voor V.H.M.O., kunnen de reiskosten 2e klas uit een verkregen rijkssubsidie geheel worden vergoed.

Indien men aan het Congres wenst deel te nemen, wordt men verzocht bovengenoemd bedrag, eventueel vermeerderd met f 0,50 voor het gebruik maken van de busverbinding, over te maken op girorekening 915935 ten name van de Penningmeester van het Congres van leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen te Zutphen voor 1 *april a.s.*

Toezending van de toegangskaarten en later van het uitvoerige congresverslag zal dan volgen. Zij, die na 1 april nog inschrijven, ontvangen hun toegangskaart bij aankomst aan het Transitorium. Het adres van de penningmeester luidt:

Dr. Th. J. Korthagen, Coehoornsingel 72, Zutphen.

Voor nadere inlichtingen wende men zich tot de secretaris.

Namens het Congresbestuur:
W. C. Riel, secretaris,
Parelmoerhorst 356, 's-Gravenhage

HET TWEEDE NEDERLANDSE MATHEMATISCHE CONGRES

Dit congres wordt gehouden op donderdag 14 april en vrijdag 15 april 1966. De Directie van de Staatsmijnen heeft hiertoe de benodigde lokaliteiten in de Mijnschool te Heerlen ter beschikking gesteld.

Het congres bestaat uit drie centrale bijeenkomsten en voorts uit sectie-bijeenkomsten. De centrale openingsvoordracht getiteld: „*Toepassingen van de Laplace Transformatie op de quantenveldtheorie*" wordt gehouden door prof. dr. B. L. van der Waerden op 14 april te 9.30 uur, terwijl op 15 april begonnen wordt met een centrale bijeenkomst over het onderwijs op de middelbare scholen. Op deze bijeenkomst spreekt prof. dr. F. van der Blij over „*Wiskunde onderwijs op het V.W.O.: spel of ernst?*" en prof. dr. H. J. A. Duparc houdt een voordracht getiteld: „*Nodig en voldoende, onnodig en onvoldoende*".

Het Congres wordt besloten met een centrale bijeenkomst waarvoor een spreker aangezocht is.

De Congres-Commissie denkt de korte voordrachten onder te verdelen in de volgende secties: *grondslagen, algebra, getallentheorie, klassieke analyse, functionaal analyse, meetkunde, topologie, algebraïsche meetkunde, mathematisch-fysische methoden, stochastiek en statistiek, numerieke wiskunde, operationele analyse, didactiek.* Ieder, die een voordracht (max. 30 minuten) tijdens dit Congres wil houden, wordt verzocht dit voor 15 maart 1966 op te geven bij de secretaris van de Congres-Commissie, dr. J. G. Dijkman, Algemene Wetenschappen, Techn. Hogeschool, Julianalaan 134, Delft. Deze aanmelding dient vergezeld te gaan van de titel en korte samenvatting van de lezing.

Inlichtingen omtrent logies, lunches, diner etc. worden verzorgd door de heer J. van Rijn, Voorlichtingsdienst Staatsmijnen, Heerlen.

Iedere beoefenaar van de wiskunde is welkom op dit Congres.

ADRES VAN DE ONDERWIJSCOMMISSIE VAN DE NEDERLANDSE ASTRONOMEN-CLUB

aan het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen.

De toestand van het onderwijs in de Sterrekunde bij het VHMO vervult ons met ongerustheid. De statistiek, gepubliceerd door het Centraal Bureau voor de Statistiek, wijst uit, dat van de lessen in de „Kosmografie" de volgende percentages door onbevoegden werden gegeven: [1])

1959	35 %
1960	35 %
1961	37 %
1962	40 %
1963	37 %

Dit zijn hoge percentages, en men kan wel aannemen, dat de vormende kracht van het vak in deze omstandigheden onvoldoende tot zijn recht komt.

Wanneer binnenkort de Mammoetwet wordt ingevoerd, zal vermoedelijk een groot aantal HBS'sen en HBS-afdelingen van Lycea de Sterrekunde als keuzevak invoeren, terwijl bij een kleiner gedeelte het vak zal verdwijnen. Anderzijds kan men verwachten, dat een zeker aantal Gymnasia en gymnasiale afdelingen van Lycea, waar het vak als zodanig niet voorkwam, van de gelegenheid zal gebruikmaken om het als leervak op te nemen. Het valt dus moeilijk te zeggen in hoeverre het vereiste aantal leraren zal toe- of afnemen.

In elk geval zal ervoor moeten worden gezorgd, dat er voldoende bevoegde docenten beschikbaar zijn: a) zodat de keuze van de bevoegde autoriteiten niet beïnvloed hoeft te worden door gebrek aan leraren; en b) zodat ook, het vak ingevoerd zijnde, de behandeling aan de eisen van goed onderwijs zal voldoen.

In deze omstandigheden is het van belang, zich af te vragen of de opleiding via de M.O. examens een bijdrage zou kunnen leveren tot het aantal bevoegden. Tot hiertoe is dit nauwelijks het geval. Wel zien wij, dat het aantal geslaagden voor M.O. Natuurkunde en Scheikunde A duidelijk toeneemt, t.o.v. het aantal doctorandi, zoals het volgende tabelletje uitwijst: [2])

	1958	1959	1960	1961	1962	1963
doctoraal ex. Wisk. Natuurk. Sterrek.	71	87	103	83	89	109
M.O.-A Natuurk. Scheik. (geslaagden)	8	5	12	12	19	
verhouding MO/doct. in procenten	11,3	5,7	11,6	14,5	21,4 %	

Uit de statistieken is nog niet te zien, hoeveel bezitters van het M.O.-A diploma Natuur- en Scheikunde de studie verder voortzetten en het M.O.-B examen Natuurkunde halen. Anderzijds weten we zeker, dat van de doctorandi een groot aantal niet naar het VHMO gaat. De bijdragen van de M.O. opleiding zou dus belangrijk

---

[1]) Statistiek van het V.H.M.O., tabel: „Bevoegd, onbevoegd en niet gegeven lessen in de wettelijk verplichte vakken".

[2]) C.B.S., Statistiek van het V.H.M.O., tabel: „Kandidaten, geslaagd voor M.O. akten-examens naar studierichting". De examens, afgenomen door een universitaire commissie zijn over de kalenderjaren verdeeld.

Zie ook: Statistiek van het Wetenschappelijk Onderwijs, tabel: „Met goed gevolg afgelegde examens".

kunnen zijn. Onder degenen, die het M.O.-B examen Natuurkunde hebben afgelegd, is er echter vrijwel geen, die daarna ook de aanvullende akte voor Sterrekunde heeft verworven.

Deze toestand zou aanzienlijk kunnen verbeteren, indien het mogelijk was, *een nieuwe akte A in te stellen met als vakken de Natuurkunde en de Sterrekunde.* Wanneer daarna het M.O.-B examen in de Natuurkunde wordt afgelegd, zou onderwijsbevoegdheid voor de Sterrekunde worden verleend. — Deze regeling zou dan volkomen parallel zijn met die bij het Hoger Onderwijs, waar de studenten kiezen tussen Wiskunde+Natuurkunde+Scheikunde of Wiskunde+Natuurkunde+Sterrekunde, en waar een candidaatsexamen met bijvak Sterrekunde volledige onderwijsbevoegdheid voor dit vak geeft, mits er een doctoraal-examen met hoofdvak Natuur- of Wiskunde op gevolgd is.

De mogelijkheid, Natuurkunde+Sterrekunde te kiezen inplaats van Natuurkunde+Scheikunde, zou vermoedelijk zeer op prijs worden gesteld, aangezien vele natuurkundigen later weinig gebruik maken van hetgeen zij voor de A-akte aan Scheikunde hebben bestudeerd en waar zij geen lesbevoegdheid aan kunnen ontlenen. De aanrakingspunten tussen Natuurkunde en Sterrekunde zijn tenminste even veelvuldig als tussen Natuurkunde en Scheikunde, ook bij het V.H.M.O. Het zou voor de a.s. leraren van groot belang zijn, het onderlinge verband van deze vakken tijdens hun studie te leren kennen en er later bij hun onderwijs telkens op te kunnen wijzen.

Indien het hierboven bepleite voorstel aangenomen mocht worden, zou zich nog een aantrekkelijke mogelijkheid openen voor het M.O.-B examen in de Natuurkunde. Het zou nl. denkbaar zijn, één van de verschillende theoretische onderdelen van dit examen op wens van de candidaat te vervangen door een onderdeel van de Theoretische Astrophysica. Waar deze vakken niet direct verband houden met de VHMO-stof, maar bedoeld zijn om de algemene, exakt-wetenschappelijke achtergrond van de a.s. leraren te verruimen, geloven wij dat de Theoretische Astrophysica daar bijzonder voor geschikt is. — Deze mogelijkheid zou voorbehouden moeten worden voor hen, die bij de A-akte in de Algemene Sterrekunde geëxamineerd zijn.

Aangezien een groot gedeelte van de M.O.-opleiding Natuurkunde en Scheikunde thans via de Universiteit geschiedt, zou het instellen van een bijzondere opleiding nauwelijks nodig zijn. Een keuze onder de bestaande universitaire colleges ware voldoende.

Wij zouden het bijzonder op prijs stellen, indien ons verzoek nader bestudeerd zou kunnen worden. Ook zijn wij gaarne bereid, het nader te komen toelichten. Voor de aandacht, die U aan ons voorstel zult willen besteden, zeggen wij U bij voorbaat dank.

De Onderwijscommissie van de
Nederlandse Astronomen-Club,

Dr. W. J. Claas
Prof. Dr. M. G. J. Minnaert
Prof. Dr. P. Th. Oosterhoff
Dr. J. A. Vreeswijk
Dr. A. J. M. Wanders
Dr. C. Zwaan
Correspondentie-adres:
Zonnenburg 2, Utrecht.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

149. Van een rechthoekig blok zijn de ribben 6, 9 en 15. Gevraagd wordt een hiervan verschillend (d.w.z. hiermee niet congruent) rechthoekig blok te vinden, waarvan

de som van de ribben hetzelfde is,
de som van de kwadraten van de lichaamsdiagonalen hetzelfde is,
de som van de oppervlakten van de zijvlakken hetzelfde is.

Is er een oplossing en zo ja, hoeveel? (B. Kootstra)

150. a. Bij een verloting neemt iemand een natuurlijk getal a in gedachten kleiner dan 10. A, B en C noemen om beurten een getal. Degene, wiens getal het dichtst bij a ligt, heeft gewonnen. Het eerste getal wordt genoemd door A, het tweede door B, het derde door C. Een reeds genoemd getal mag niet door een van de volgende personen herhaald worden. Als twee personen twee getallen raden, die even ver van a verwijderd zijn, terwijl het derde verder van a verwijderd is, beslist het lot (en hebben deze twee personen dus gelijke kans op winst). We nemen aan, dat A, B en C maximaal intelligent zijn. Hoe zullen ze achtereenvolgens raden om zo groot mogelijke kans op winst te krijgen?

b. Dezelfde vraag, als a een natuurlijk getal kleiner dan 100 is en er vier personen zijn, die raden. (De vorige vraag is slechts als vooroefening bedoeld)

c. A is helaas niet zo bijster intelligent; hij begint met 30 te raden (in het sub b bedoelde geval). B, C en D zijn wel maximaal intelligent. Wat raden zij?

N.B. Als verschillende keuzen door B, C of D dezelfde grootste kans op winst opleveren, nemen we aan dat de kans, dat B, C resp. D een bepaald getal met maximale kans kiest voor al deze getallen gelijk is. Zal D dus b.v. dezelfde maximale kans op winst hebben, als hij een van de getallen 25 tot en met 37 kiest, dan nemen we aan, dat de kans, dat hij 25 kiest 1/13 is en eveneens de kans, dat hij 26, 27, . . ., 37 kiest.

OPLOSSINGEN

(zie voor opgaven het vorige nummer)

146. We stellen eerst de vraag: schrijf alle getallen van 1 tot en met n in het drietallig stelsel; in hoeveel van deze getallen komt het cijfer 2 geen enkele keer voor?

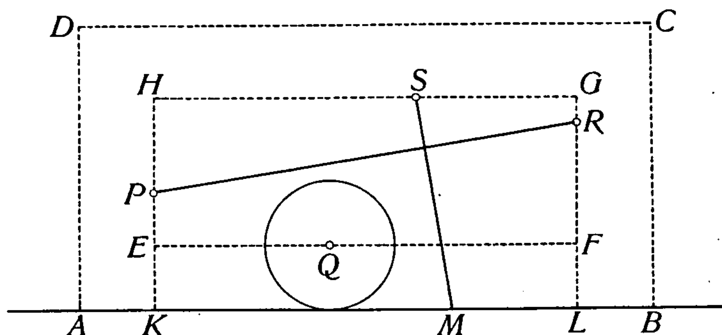
Aan een tweetal voorbeelden maken we de methode duidelijk. Onderstel $n =$ 210.201.121 (drietallig). We kunnen n dan vervangen door 200.000.000, want in de getallen daarboven komt ten minste één cijfer 2 voor. Nu voldoen aan de vraag alle getallen, die op de 9 plaatsen een 0 of een 1 hebben. Dit zijn er 2^9. Het getal 0 moet echter niet meegerekend worden en dus vinden we $2^9—1$.

Onderstel $n =$ 110.201.121. Dit getal kunnen we vervangen door 110.200.000. Tot en met 100.000.000 voldoen nu 2^8 getallen aan de vraag. Boven 100.000.000 tot en met 110.000.000 voldoen er 2^7 getallen. En ten slotte boven 110.000.000 tot en met 110.200.000 nog $2^6—1$ (als in het eerste voorbeeld).

Gegeven was $n =$ 2093 (tientallig), dus $n =$ 2.212.112 (drietallig). Het aantal getallen, dat geen enkel cijfer 2 bevat en hoogstens gelijk aan 2.212.112 is, is dan (conform het eerste voorbeeld) $2^7—1 = 127$. Het aantal getallen, dat ten minste één cijfer 2 bevat, is dan $2093—127 = 1966$.

Trouwe lezers van deze rubriek zullen reeds direct begrepen hebben, dat de heer Kootstra van plan was u op de hem eigen manier een gelukkig nieuwjaar te wensen.

147. In bijgaande figuur zijn P, Q, R en S de vier palen. De zijden van rechthoek $KLGH$ verhouden zich ook als 1 : 2. Trek nu PR en loodrecht op PR een lijnstuk $SM = \frac{1}{2}PR$. Beschrijf om Q een cirkel met straal 1 m en trek door M een raaklijn aan deze cirkel. De lijn AB is daarmee gevonden. De rest van de constructie biedt geen moeilijkheid meer.



148. Bij het bepalen van de overlevingskansen, moeten we twee omstandigheden in acht nemen.

a. Ieder zal de meest gevaarlijke tegenstander trachten uit de weg te ruimen.

b. Zolang A en B beide in leven zijn, zullen ze proberen elkaar neer te schieten. Dus zal C, zolang A en B leven, er de voorkeur aan geven in de lucht te schieten.

We gaan nu de consequenties na van de zes verschillende uitslagen van de loting.

De gelote volgorde is A, B, C. A schiet eerst B dood, C mikt daarna op A en wordt, als hij mist, zelf doodgeschoten. Overlevingskansen resp. $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$.

Geval A, C, B. De situatie blijft onveranderd. Kansen $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$.

Geval C, A, B. Nu begint C met in de lucht te schieten. Het geval wordt daardoor teruggebracht tot A, B, C. Kansen $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$.

Geval B, A, C. B mikt op A. Als hij mist, schiet A daarna B dood. C mikt dan op A. Dit geeft overlevingskansen $\frac{1}{10}$ voor A en C.

Als A door B geraakt wordt, schiet C op B, daarna eventueel B op C, enz. Dit geeft overlevingskansen voor C: $\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{200}+\ldots\right)=\frac{4}{9}$ en analoog voor B: $\frac{16}{45}$.

In totaal zijn de overlevingskansen dus resp. $\frac{1}{10}, \frac{16}{45}, \frac{49}{90}$.

Geval C, B, A. C schiet in de lucht. Kansen weer $\frac{1}{10}, \frac{16}{45}, \frac{49}{90}$.

Geval B, C, A. Eerst richt B op A. Raakt hij A, dan schieten C en B verder om beurten. Kansen resp. 0, $\frac{16}{45}, \frac{4}{9}$. Mist hij, dan schiet C in de lucht, A schiet B neer en C tracht A te raken. Kansen resp. $\frac{1}{10}$, 0, $\frac{1}{10}$. Totaal resp. $\frac{1}{10}, \frac{16}{45}, \frac{49}{90}$.

De totale overlevingskans voor C is dus:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{49}{90}+\frac{49}{90}+\frac{49}{90}\right)=\frac{47}{90}.$$

Dit is meer dan $\frac{1}{2}$ en dus heeft C stellig de beste kansen. (De kansen voor A en B zijn resp. $\frac{3}{10}$ en $\frac{8}{45}$.)